分形信号的小波基表示*

刘 峰 刘贵忠 张茁生

西安交通大学电子与信息工程学院信息与通信工程系，西安 710049

摘要 在研究自相似信号小波变换性质的基础上,利用离散小波变换的重构公式给出了产生分形信号的小波模型,并推导了由该模型产生的近似分形信号的时间平均功率谱计算公式. 给出了该模型与已有模型比较的数值实验,结果表明该模型构造的信号能较好地近似分形信号.

关键词 自相似性 小波变换 分形 功率谱

基于小波分析的分形信号研究,特别是 $1/f$ 信号的合成(重构)[1]是近年来人们广泛关注的研究领域. 在这一领域,分形信号的小波模型是信号处理中的一个基本问题. Wornell[2]讨论了用小波级数表示 $1/f$ 信号的问题,已证明在一定条件下,可用一簇离散白噪声近似合成 $1/f$ 信号. 其优点是应用简单方便, 但该模型忽略了小波细节之间的相关性,假定 $1/f$ 信号的小波变换为平稳的白噪声,使得合成信号的功率谱与 $1/f$ 谱有较大差异(见本文实验部分),因此需做进一步的讨论. 本文主要讨论 $1/f$ 信号小波模型的改进,也就是如何利用小波基更好地表示 $1/f$ 信号的问题. 与 Wornell 方法不同的是本文在考虑 $1/f$ 信号谱指数的同时,也考虑了 $1/f$ 信号小波变换之间的相关性. 这是因为分形信号具有较复杂的结构,仅利用描述信号整体性质的谱指数,并不能完全描述分形信号[3~7]. 由本文实验可以看出, $1/f$ 信号小波变换之间的相关性对信号功率谱有较大影响.

1 分形信号的小波变换

一般认为,广义统计自相似信号是满足如下等式的随机过程 $f(t)$

$$E[f(at)] = a^H E[f(t)] \qquad E[f(at)f(as)] = a^{2H}E[f(t)f(s)], \tag{1}$$

其中 $E[\ \ ]$表示数学期望, a 是任意的正实数, H 称为相似参数. 如果 $f(t)$的功率谱还具有下述幂律关系

$$S_f(\omega) \propto \frac{1}{|\omega|^{2H+1}}, \tag{2}$$

则称 $f(t)$为分形信号[2](或 $1/f$ 信号). 记 $\gamma = 2H+1$,称其为信号 $f(t)$的谱指数. 分形信号的重要特征是它的自相似性,在本文中指信号 $f(t)$关于时间尺度是自相似的,也就是通常所说的信号没有特征尺度. 对信号的离散小波变换来说,尺度进行了离散化处理,考虑的只是离

2000-10-20 收稿, 2000-11-22 收修改稿

* 国家自然科学基金(批准号: 69872030), 教育部优秀青年教师基金(97 年度)和陕西省自然科学基金(批准号: 98X08)共同资助

散尺度 2^{-m}, $m\in\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ 表示整数集,所以上述自相似性定义需做适当的改变. 在下述讨论中,信号 $f(t)$ 的自相似性均指(1)式对于离散的实数 $a_k\in\{2^{-m}\mid m\in\mathbb{Z}\}$ 成立.

设 $\psi(t)$ 是小波基函数,$\psi^*(t)$ 为对应的共扼小波基函数,则信号 $f(t)$ 的离散小波变换定义[9]为

$$x(m,n)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\psi_{m,n}^*(t)\mathrm{d}t,\qquad m,n\in\mathbb{Z},\tag{3}$$

其中 $\psi_{m,n}(t)=2^{m/2}\psi(2^mt-n)$. 若 $\psi(t)$ 满足完全重构条件,则 $f(t)$ 可表示为

$$f(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{m,n}\psi_{m,n}(t),\tag{4}$$

其中 $c_{m,n}=\langle f(t),\tilde{\psi}_{m,n}(t)\rangle$, $\tilde{\psi}(t)$ 是 $\psi(t)$ 的对偶小波. 本文的目的是利用(4)式模拟(或表示)分形信号. 换言之,我们要考虑这样一个问题:即对于给定的小波 $\psi(t)$,小波级数(4)的系数 $c_{m,n}$ 满足什么条件时,(4)式表示的信号是分形信号. 为此,首先讨论如何用小波变换刻画信号 $f(t)$ 的自相似性问题.

进一步假设 $\psi(t)$ 是正交小波,$x(m,n)$ 是信号 $f(t)$ 的离散小波变换. 此时 $c_{m,n}=x(m,n)$,由(1)式可直接验证 $f(t)$ 是相似参数为 H 的自相似信号的充要条件是对 $\forall\, k,m,n\in\mathbb{Z}$,及 $\forall\, m_i,n_i\in\mathbb{Z}$, $i=1,2$,有

$$E[x(m-k,n)]=2^{(2H+1)k/2}E[x(m,n)],\tag{5}$$

$$E[x(m_1-k,n_1)x(m_2-k,n_2)]=2^{(2H+1)k}E[x(m_1,n_1)x(m_2,n_2)].\tag{6}$$

(5)与(6)式给出了两尺度上小波系数 $x(m,n)$ 之间的关系. 如果把各尺度上的小波系数与尺度为 1(对应 $m=0$)的小波系数做比较,则更容易看清楚这种关系. 记 $R_{m_1,m_2}(m_1,m_2,n_1,n_2)=E[x(m_1,n_1)x(m_2,n_2)]$,并当 $m_1=m_2$ 时,简记 $R_{m_1m_2}(\cdots)$ 为 $R_m(\cdots)$,则由(5)式知 $R_m(\cdots)$ 与其归一化 $r_m(\cdots)$ 满足下列关系式

$$R_m(m,m,n_1,n_2)=2^{-m(2H+1)}R_0(0,0,n_1,n_2),\tag{7}$$

$$\begin{aligned}r_m(n_1,n_2)&=R_m(m,m,n_1,n_2)/\sqrt{\mathrm{var}(x(m,n_1)(\mathrm{var}(x(m,n_2))}=\\&R_0(0,0,n_1,n_2)/\sqrt{\mathrm{var}(x(0,n_1))\mathrm{var}(x(0,n_2))}=r_0(n_1,n_2).\end{aligned}\tag{8}$$

上式表明,对自相似信号的小波变换而言,任意两尺度上信号的相关性总是相同的,即当尺度放大或缩小时,小波细节的二阶统计特性不变.

2 分形信号的模拟

假定 $\xi(m,n)$ 是一簇零均值二维随机过程. 考虑用其产生的信号

$$f(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi(m,n)\psi_{m,n}(t)\tag{9}$$

来模拟 $1/f$ 信号问题. 由上节讨论知要使 $f(t)$ 具有自相似性, $\xi(m,n)$ 应当满足 (5)与(6)式. 为了讨论 $f(t)$ 的功率谱密度,先考虑信号 $f(t)$ 的近似 $R_{f_M}(t)=\sum_{m=-M}^{M}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi(m,n)\psi_{m,n}(t)$,即将 $f(t)$ 中分辨率粗于 2^M 与细于 2^{-M} 的信息抛弃,这里 M 是充分大的正整数. 由(5)与(6)式知在每一尺度上信号的能量是无限的,所以需要考虑关于时间平均自相关函数 $R_{fM}(\tau)=$

$2^{-M}\int_0^{2^M} E[f_M(t)f_M(t+\tau)]\mathrm{d}t$．利用该式可导出信号关于时间的平均功率谱密度．我们证明了如下结论(证明从略)：

定理　设 $\xi(m,n)$ 满足等式(5)与(6)，并且满足条件：(a)对任意 $m\in\mathbb{Z}$，$\xi(m,n)$ 关于 n 是广义平稳的随机过程；(b) $\sum_{k=0}^{\infty}|R_0(k)|<\infty$，其中 $R_0(k)=E[\xi(0,n+k)\xi(0,n)]$；(c) $\forall m_1,m_2\in\mathbb{Z}$，当 $m_1\neq m_2$ 时，$E[\xi(m_1,n_2)\xi(m_2,n_2)]=0$．则当 $\psi(t)$ 是 R 阶正则的正交小波，并且 $2R>2H+1>0$ 时，由(9)式表示的信号是相似参数为 H 的自相似信号，且关于时间的平均功率谱密度为

$$S_f(\omega)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}2^{-m\gamma}S_0(2^{-m}\omega)\,|\hat{\psi}(2^{-m}\omega)|^2,\tag{10}$$

其中 $S_0(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_0(k)\mathrm{e}^{-jk\omega}$，$\gamma=2H+1$，$\hat{\psi}(\omega)$，表示 $\psi(t)$ 的 Fourier 变换．

注意到 $R_m(k)=2^{-m\gamma}R_0(k)$，$S_m(\omega)=2^{-m\gamma}S_0(\omega)$，所以(10)式中的通项可解释为信号 $f(t)$ 在相应尺度上的功率谱，而 $S_f(\omega)$ 是信号 $f(t)$ 在各尺度上功率谱的叠加．由(9)式产生的信号 $f(t)$ 的功率谱 $S_f(\omega)$ 不仅依赖于谱指数 γ，也依赖于每一尺度上信号 $\xi(m,n)$ 之间的相关结构 $R_m(k)$．从表达式(10)的结构可以看出 $S_f(\omega)$ 具有倍频程波动，即对任意 $m\in\mathbb{Z}$，有

$$S_f(2^m\omega)=2^{-m\gamma}S_f(\omega).$$

在双对数坐标系 $(\lg S_f(\omega),\lg\omega)$ 中，呈现为等间隔相似波动．这种波动主要来源于对尺度的离散化处理．就形式为(9)的信号而言，这种波动是不可避免的．这意味着用(9)式构造 $1/f$ 信号时，所得信号 $f(t)$ 总是一近似 $1/f$ 信号．理论上，我们可进一步证明：如果 $|\omega|>0$ 时，$S_0(\omega)>0$，那么 $f(t)$ 是一近似 $1/f$ 过程，即存在常数 $0<m_f\leqslant M_f<\infty$，使得

$$m_f/|\omega|^{\gamma}\leqslant S_f(\omega)\leqslant M_f/|\omega|^{\gamma}.\tag{11}$$

3　实验结果

根据上节讨论，数值 M_f 与 m_f 刻画了 $S_f(\omega)$ 与 $1/f$ 谱的偏离程度．为此我们引入合成信号功率谱 $S_f(\omega)$ 与 $1/f$ 谱的误差：$E=M_f-m_f$，其中 $m_f=\inf(|\omega|^{\gamma}S_f(\omega))$，$M_f=\sup(|\omega|^{\gamma}S_f(\omega))$，以此对各种模型进行比较．

Wornell[2]给出的 $1/f$ 信号小波模型为：假定 $\xi(m,n)$ 是互不相关的零均值白噪声序列，$\mathrm{var}(\xi(m,n))=\sigma^2 2^{-\gamma m}$，在此取 $\sigma^2=1$，则可由(9)式构造近似 $1/f$ 信号．用本文方法产生 $1/f$ 信号时，先要构造序列 $\xi(m,n)$．在本实验中，对每一给定 m，选择 $\xi(m,n)$ 为 Markov 序列，即 $\xi(m,n)$ 关于 n 符合下列 AR(1)模型：

$$x_1=w_1,\ x_n-\rho x_{n-1}=w_n,\quad n>1,\ 0<\rho<1,\tag{12}$$

w_n 为平稳的正态白噪声序列，$E[w_n]=0$，$\mathrm{var}(w_n)=(1-\rho^2)2^{-\gamma m}$，而 $E[x_n]=0$，$\mathrm{var}(x_n)=2^{-\gamma m}$．$\xi(m,n)$ 作为正态白噪声通过一平稳线性系统所产生的输出．由此产生的序列 x_n 的自相关函数，也就是 $\xi(m,n)$ 关于 n 的自相关函数：$R_m(k)=2^{-\gamma m}\mathrm{e}^{-a|k|}$，参数 $a>1$ 由 ρ 确定．容易验证序列 $\xi(m,n)$ 满足定理的条件，但参数 a(或 ρ)的选择对功率谱 $S_f(\omega)$ 有影响，所以

对于不同的谱指数 γ 需选择适当的参数 a. 表 1 就小波基函数 $\psi(t)$ 为 Haar 小波和二阶 Daubechies 小波时,给出了不同谱指数 γ 和参数 a 情况下 Wornell 方法与本文方法的实验结果,其中 E_{wor}是用 Wornell 模型合成分形信号时产生的功率谱误差,E_{our}是用本文方法时产生的功率谱误差.

表 1 不同参数下 Wornell 方法与本文方法的比较

误差		Haar 小波				二阶 Daubechies 小波		
	γ	0.5	1.0	1.5	1.8	1.5	1.8	2.0
	a	2.0	1.8	1.5	1.7	2.8	2.4	2.2
E_{wor}		0.45	1.77	7.01	17.14	1.75	4.52	8.61
E_{our}		0.12	0.50	3.33	12.24	0.80	2.03	4.48

由表 1 可以看出,对于不同的谱指数 γ,用本文方法构造的近似 $1/f$ 过程的功率谱误差 E_{our}比 Wornell 方法产生的功率谱误差 E_{wor}均有减小;且当谱指数 γ 增大时,参数 a 减小,即要求 $\xi(m,n)$关于 n 的相关性增强. 从小波变换的角度来看,这一现象表明,当谱指数 γ 增大时,$1/f$ 过程小波变换之间的相关性逐渐增强.

参 考 文 献

1 张济忠. 分形. 北京: 清华大学出版社, 1997
2 Wornell G W. A Karhunen-Loeve-like expansion for 1/f processes via wavelets. IEEE Trans Inform Theory, 1990, 36(4): 859
3 Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman, 1982
4 Barnes J A, et al. A statistical model of flicker noise. Proc IEEE, 1966, 54(2): 176
5 Barton R J, et al. Signal detection in fractional Gaussian noise. IEEE Trans Inform Theory, 1988, 34(5): 945
6 Van der Ziel A. On the noise spectra of semi-conductor noise and of flicker effect. Physica, 1950, 16(4): 359
7 Keshner M S. 1/f noise. Proc IEEE, 1982, 70(3): 212
8 赵松年, 等. 子波变换与子波分析. 北京: 电子工业出版社, 1997
9 Wornell G W. Signal Processing with Fractals. Prentice Hall PTR, 1996